Analityczne metody optymalizacji z ograniczeniami. Numeryczne metody optymalizacji bez i z ograniczeniami

Metody te służą do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych.

**Co to problemy optymalizacyjne?**

Problemy optymalizacyjne to zagadnienia matematyczne, które polegają na znajdowaniu najlepszych rozwiązań dla określonego celu. Celem może być maksymalizacja lub minimalizacja funkcji celu, która jest zależna od określonych zmiennych decyzyjnych.

**Analityczne metody optymalizacji z ograniczeniami**

Analityczne metody optymalizacji z ograniczeniami to metody, które polegają na rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych za pomocą analizy matematycznej. Służą one do znajdowania optymalnych rozwiązań, które spełniają określone ograniczenia. W tych metodach, problem optymalizacyjny jest formułowany matematycznie i rozwiązywany poprzez analizę równań i nierówności.

Przykłady:

* Metoda Lagrange'a polega na definiowaniu funkcji Lagrange'a, która jest sumą funkcji celu i iloczynu skalarnego zmiennych Lagrange'a z ograniczeniami. Rozwiązaniem jest punkt, w którym pochodna funkcji Lagrange'a jest równa zero. Jest stosowana tylko dla równościowych ograniczeń.
* Metoda Kuhn-Tucker polega na wprowadzeniu zmiennych Lagrange'a i dodaniu warunków kompatybilności do oryginalnych ograniczeń. W rozwiązaniu, pochodne funkcji celu i zmienne Lagrange'a są równe zero, a ograniczenia są spełnione. Pozwala na rozwiązanie problemów optymalizacyjnych z nierównościowymi ograniczeniami.

1. Warunek równoważności: jeśli ograniczenie jest równe zero, to przyrost jego wartości jest równy zero
2. Warunek nieodwracalności: jeśli ograniczenie jest nierówne zero, to jego wartość jest nieujemna.
3. Warunek nieodwracalności: jeśli ograniczenie jest równe zero, to wartość jego zmiennej Lagrange'a jest równa zero.

* Metoda Karush-Kuhn-Tucker polega na rozszerzeniu metody Kuhn-Tucker o dodatkowe warunki, które pozwalają na rozwiązanie problemów z nierównościowymi ograniczeniami oraz nieograniczonymi zmiennymi

1. Warunki równoważności: pochodna funkcji celu jest równa sumie iloczynów pochodnych ograniczeń i ich zmiennych Lagrange'a
2. Warunki nieodwracalności: jeśli ograniczenie jest nierówne zero, to jego wartość jest nieujemna i jego zmienna Lagrange'a jest nieujemna; jeśli ograniczenie jest równe zero, to wartość jego zmiennej Lagrange'a jest równa zero.

**Numeryczne metody optymalizacji bez i z ograniczeniami**

Numeryczne metody optymalizacji polegają na przeszukiwaniu przestrzeni rozwiązań za pomocą różnych algorytmów. Numeryczne metody optymalizacji są łatwiejsze do zaimplementowania niż analityczne metody, jednak mogą być mniej dokładne i wymagają więcej obliczeń. W zależności od problemu, jedna lub druga metoda może być bardziej odpowiednia.

Numeryczne metody optymalizacji bez ograniczeń to metody, które polegają na rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych bez uwzględnienia ograniczeń.

Numeryczne metody optymalizacji z ograniczeniami to metody, które polegają na rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych z uwzględnieniem ograniczeń.

Przykłady metod numerycznych bez ograniczeń:

* Metoda powiększania i pomniejszania (ang. bisection method) polega na dzieleniu przedziału, w którym znajduje się rozwiązanie, na mniejsze podprzedziały i wybieraniu tego, w którym znajduje się minimum lub maksimum funkcji celu. Ta metoda jest prosta w implementacji, ale może być powolna dla skomplikowanych problemów.
* Metoda gradientu prostego (ang. gradient descent method) polega na iteracyjnym zmienianiu zmiennych decyzyjnych w kierunku przeciwnym do gradientu funkcji celu, tak aby zbliżać się do minimum lub maksimum funkcji. Ta metoda jest często stosowana w uczeniu maszynowym i sieciach neuronowych.
* Metoda Newtona (ang. Newton's method) polega na użyciu pochodnej drugiego rzędu funkcji celu do przyspieszania zbieżności w kierunku minimum lub maksimum. Ta metoda jest bardziej skuteczna niż metoda gradientu prostego, ale wymaga obliczenia i przechowywania macierzy Hessianu, co może być trudne dla dużych problemów.
* Metoda gradientu sprzężonego (ang. conjugate gradient method) podobnie jak metoda gradientu prostego, metoda gradientu sprężonego polega na iteracyjnym znajdowaniu minimum funkcji poprzez przesuwanie się po jej powierzchni w kierunku przeciwnym do gradientu. Różnica polega na tym, że metoda gradientu sprężonego wykorzystuje kierunek sprężony (ang. conjugate direction), który jest kombinacją kierunków gradientu z poprzednich kroków.

Przykłady metod numerycznych z ograniczeniami:

* Metoda powiększania i pomniejszania z ograniczeniami polega na dzieleniu przedziału, w którym znajduje się rozwiązanie, na mniejsze podprzedziały i wybieraniu tego, w którym znajduje się minimum lub maksimum funkcji celu przy jednoczesnym spełnieniu ograniczeń.
* Metoda gradientu projekcyjnego polega na iteracyjnym zmienianiu zmiennych decyzyjnych w kierunku pochodnej funkcji celu, przy jednoczesnym zachowaniu ograniczeń poprzez projekcję na przestrzeń spełniającą warunki. Metoda ta jest podobna do metody gradientu prostego, jednak różni się tym, że przed każdym krokiem aktualizuje ona rozwiązanie tak, aby zawsze spełniało ono ograniczenia. Konkretniej, dla każdego kroku metoda gradientu projekcyjnego składa się z dwóch kroków:

Aktualizacja rozwiązania w kierunku przeciwnym do gradientu funkcji celu

Projekcja rozwiązania na zbiór spełniający ograniczenia

* Metoda Penalty polega na dodaniu kary za nie spełnienie ograniczeń do funkcji celu, aby zachęcić do spełnienia ograniczeń. Metoda penalty również dąży do minimalizacji funkcji celu poprzez iteracyjne zmiany zmiennych decyzyjnych. W tej metodzie, rozwiązanie jest poszukiwane dla funkcji celu zwiększonej o pewną wartość kary za każde nie spełnione ograniczenie. W ten sposób, metoda ta zachęca rozwiązanie do spełnienia ograniczeń, ponieważ rozwiązania, które nie spełniają ograniczeń, będą miały wyższą wartość funkcji celu. Ważne jest aby dobrać odpowiednią wartość λ, ponieważ mała duża wartość λ może prowadzić do zbyt małej wagi kary za nieprzestrzeganie ograniczeń, co skutkuje rozwiązaniem nie spełniającym ograniczeń, natomiast zbyt duża wartość λ może spowodować, że kara będzie miała zbyt duży wpływ na rozwiązanie i spowoduje, że rozwiązanie będzie zbyt dalekie od globalnego minimum funkcji celu.